衝撃波の水中への伝播の問題に対する発展方程式の応用(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

桜井, 明; 新井, 勉; 管野, 敬祐

数理解析研究所講究録
477巻 1983年 245-257

衝撃波の水中への伝播の問題に対する発展方程式の応用

東京電機大 理工　桜井 明　新井 勉
菅野 敬祐

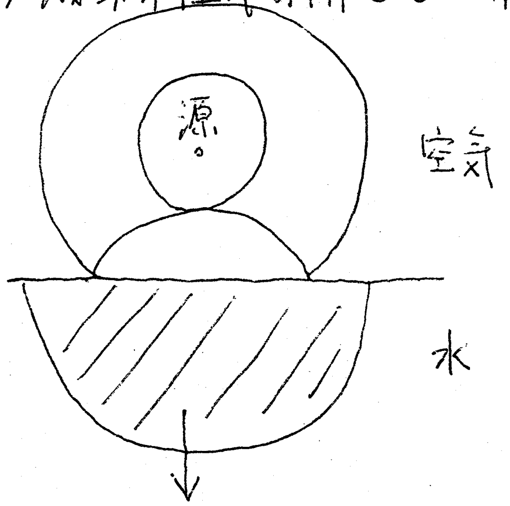
(Sakurai Akira, Arai Tsutomu, Sugano Keisuke)

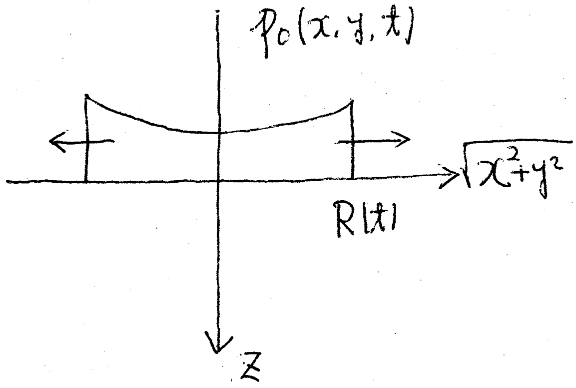
§1. 序

水面上空に置かれた点源(あるいは線源)から発生する球面(あるいは円柱面)衝撃波が水面に達すると，その一部は反射し，残りは水中に伝播する。この時，源の強さが弱いか，あるいは源が充分高いところにあれば，その反射，伝播は，ともに音波として線型理論で扱える。ところが，源が強いと，その水面での反射の様相は非線型性をもち，これを完全に取りあつかう事はむづかしい。しかし，この時でも，水中に伝播する波は，大体において音波で近似でき，さらに，波のエネルギーの大部分が反射されるので，水面における圧力は殆んど球面(円柱面)衝撃波の剛体面での反射圧に等しくなっている。

そこで，この現象をモデル化し，水面上$(z=0)$での圧力が境界条件として図のような$p_0(x,y,t)$ (x,y,z：位置，t：時間)で与えられるものとし，静水中に生起する圧力$p(x,y,z,t)$

を，波動方程式の解として求める問題とする：





問題

$$
(1)\quad \begin{cases} \Box p = 0 & \Box = \partial^2/\partial t^2 - \triangle \\ p(x,y,z,0) = p'(x,y,z,0) = 0 & ' = \dfrac{\partial}{\partial t} \\ p(x,y,0,t) = p_0(x,y,t) & \end{cases}
$$

この時，圧力 $p_0(x,y,t)$ が滑らかな関数であれば，古典的な解が存在し，それは例へば強さ p_0 の doublet が分布しているとして，

$$
p(x,y,z,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint p_0(x',y',t')\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\beta}\,dx'dy'
$$

$$
\beta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')+z^2}\ ,\quad t' = t-\beta
$$

とあらわせる。しかし現在の問題では，p_0 は上図のように $\sqrt{x^2+y^2}=R(t)$ で不連続となるので，上のような古典解の公式をそのまま用いる事は出来ない。事実，この公式を使って

形式的に計算すると1)，圧力 p の不連続面や，そこでの微分などがあらわれ，このような場所での様相を詳しく解析する事が出来ない。これ以外の場所においては，1)の結果は物理的には妥当であると考えられるが，しかしそれも明らかな事ではない。

そこで本講では，上記の問題を数学的な観点から考える事にする。すなわち，古典解の概念の拡張である広義解を定義し，その一意的存在を証明する。さらに，広義解のもつ，いくつかの物理的な性質を調べる。広義解の存在は，まずデータを滑らかな関数で近似し，それらに対応する近似解(古典的)をつくり，次に近似解の極限をとる事によって示される。その際，抽象的な発展方程式の理論を応用すると，以上の手順が，見通しよく遂行される。

§2. 広義解

簡単のために空間次元を2とし(円柱面の場合。議論は球面あるいは一般 n 次元でも全く同様に行える)，$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ とおく。$\partial\Omega$ で Ω の境界をあらわす。(1)を，もう少し一般化し，次のような問題を考えよう：

$$
(2)\quad \begin{cases} \Box p = f(t,x,y) & t>0 \quad (x,y)\in\Omega \\ p(0,x,y)=u_0(x,y),\quad p'(0,x,y)=u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega \end{cases}
$$

$$p(t, x, 0) = p_0(t, x), \quad t>0, \ x \in \mathbb{R}。$$

ここで $f(t, x, y)$, $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $p_0(t, x)$ は与えられた関数である。

広義解を定義するために，いくつかの関数空間を導入しよう。

$L^2(\Omega) = \{\Omega$ 上で2乗可積分な関数の全体$\}$

$H^2(\Omega) = \{$2階までの偏導関数が全て $L^2(\Omega)$ に属するような関数の全体$\}$

$H^1_0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$

$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{u \in \mathcal{D}' \mid (1+|\xi|)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{}$ は Fourier 変換 $\}$

これらはみな Hilbert 空間になっている。さらに

$H^{-1}(\Omega) = H^1_0(\Omega)$ の共役空間，

$H^{-1/2}(\partial\Omega) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ の共役空間

とし，

$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid u$ の台は Ω 内のコンパクト集合$\}$

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ の共役空間（$\equiv$ Schwartz の超関数の空間）

とする。Hilbert 空間 L^2 を，その共役空間と同一視すれば

これらの空間の間の関係は

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$
$$H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

のようになっている。(,)で共役対(あるいはL^2-内積)を表わすものとする。Banach空間 X に対し

$$L^2(0,T;X) = \{u : [0,T] \ni t \longmapsto u(t) \in X \mid \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty\}$$

とする。これもBanach空間になり，例へば $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ の共役空間は $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ である。

さて，問題(2)において，データ f, u_0, u_1, ϕ_0 は次の仮定を満すものとしよう。

仮定 I (i) $f \in L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$

(ii) $u_0,\ u_1 \in H^{-1}(\Omega)$

(iii) $\phi_0 \in L^2(0,\infty;H^{-1/2}(\partial\Omega))$。

注意 関数は時間 t を変数にもち，適当な空間に値をもつベクトル値関数とみなす。

以上のもとに，問題(2)の広義解を次のように定義しよう。

定義 超関数 $\phi(t,x,y)$ が以下の(i)(ii)を満足する時，ϕ を問題(2)の広義解と言う。

(i) 任意の $T>0$ に対し，$\phi \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

(iii) 積分等式：

$$(3)\qquad \int_0^T (p, \Box v)\,dt = \int_0^T (f, v)\,dt + (u_1, v(0)) - (u_0, v'(0)) - \int_0^T \left(p_0, \frac{\partial v}{\partial y}(t, x, 0)\right)dt$$

が，任意の $v \in \mathcal{D}^*$ に対し成立する。ただし

$$\mathcal{D}^* = \{ v(t,x,y) \mid v \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)),\ \Box v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),\ v(T) = v'(T) = 0 \}$$

である。

注意(1)　データが滑らかで，p が (2) の古典解（または L^2 の意味での強解）ならば，p は広義解でもある。この事は(2)に v をかけ，Greenの公式を用いて部分積分してみればすぐにたしかめられる。

注意(2)　広義解 p は超関数の意味で波動方程式を満足する：$\Box p = 0$ in $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$。実際定義式(3)で $v \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ とすれば，右辺 $= 0$ となるから。

このような広義解の存在に関して，次の定理が成立する。

<u>定理1</u> 仮定Iのもとで，問題(2)の広義解が，ただ一つ存在する。

<u>証明の概略</u> まず，データ u_0, u_1, p_0, f に対し，関数列 $u_{0n}, u_{1n} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $p_{0n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $f_n \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ $(n=1,2\cdots)$ を

$$(4)\quad \begin{cases} u_{0n} \longrightarrow u_0, \quad u_{1n} \longrightarrow u_1 & \text{in } H^{-1}(\Omega), \\ p_{0n} \longrightarrow p_0 & \text{in } L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega)), \\ f_n \longrightarrow f & \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ as } n\to\infty \end{cases}$$

のようにえらぶ。

このような，滑らかなデータに対し，波動方程式の初期値境界値問題(2)が，古典解を持つ事は，例へば半群理論等を応用すれば，それ程難かしくなく証明できる。この解を p_n としよう。(p_n は広義解にもなっている事に注意)。

この近似解 p_n が，$n\longrightarrow\infty$ の時に，ある超関数 p に収束する事，そして p が所望の広義解である事，を証明するのであるが，その為に次の補題が必要となる。

<u>補題1.</u> 初期値，境界値問題：

$$(5)\quad \begin{cases} \Box v = g(t,x,y) & 0\le t\le T,\ (x,y)\in\Omega \\ v(T) = v'(T) = 0 & (x,y)\in\Omega \end{cases}$$

$$\left. v\right|_{\partial\Omega}=0$$

の解を v_φ とかく．もし非斉次項 φ が $\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ならば，$v_\varphi\in\mathcal{D}^*$ である。

この補題の証明は節末にあげる。

さて，まず $p_n\longrightarrow{}^\exists p\ (n\to\infty)$ in $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$ である事を示そう．p_n は滑らかな解であるから，広義解でもあり従って，データ u_{0n}, u_{1n}, p_{0n}, f_n に対し等式(3)を満足している。さらに，任意の $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)\ (\subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))$ に対し，(5)の解 v_φ は $\mathcal{D}^*$ に属しているから，等式(3)で v の代りに v_φ を入れれば，

$$\int_0^T(p_n,\varphi)\,dt=\int_0^T(f_n,v_\varphi)\,dt+(u_{1n},v_\varphi(0))$$

$$-(u_{0n},v'(0))-\int_0^T\left(p_{0n},\frac{\partial v_\varphi}{\partial y}\right)dt$$

となる。

ここで $v_\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $v_\varphi(0)$, $v_\varphi'(0)\in H_0^1(\Omega)$, $\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}\in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))$ なる事，及び収束(4)に注意すれば，上式の右辺が $n\longrightarrow\infty$ で収束する事がわかる．超関数の空間は弱完備であるから，これより p_n は，ある p に超関数の意味で収束する事になる。

次に，列 $\{p_n\}$ が $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ で有界なる事を示そう。

任意の $\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ に対し，再び (5) の解 $v_\varphi\in\mathcal{D}^*$ を考える。これを広義解の定義式(3) に入れ，さらにトレースの定理： $\left\|\frac{\partial v_\varphi}{\partial\nu}\right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\leqq C\|v_\varphi\|_{H^2(\Omega)}$ $(v_\varphi\in H^2(\Omega))$ を用いて右辺を評価すれば，

$$\left|\int_0^T(p_n,\varphi)dt\right|\leqq\|f_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|v_\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1)}$$

$$+\|u_{1n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v_\varphi(0)\|_{H_0^1(\Omega)}+\|u_{0n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v_\varphi'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+C\|p_{0n}\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))}\|v_\varphi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$$

をうる。ところで (4) より，$\|f_n\|$, $\|u_{1n}\|$, $\|u_{0n}\|$, $\|p_{0n}\|$ は n にかかわらず有界であり，また $v_\varphi\in\mathcal{D}^*$ であるから結局

$$\left|\int_0^T(p_n,\varphi)dt\right|\leq C(\varphi)\quad(<\infty)$$

なる評価が得られる。ここに $C(\varphi)$ は n にはよらず，φ に依存して決まる定数である。$L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ が $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ の共役空間である事，及びよく知られた一様有界性定理より，上式から $\|p_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$ が n によらず有界なる事が結論される。

さて $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ の有界列は *-弱位相に関してコン

パクトであるから，$\{p_n\}$ の部分列で $*$－弱収束するものがある。これを $p_{n_k} \longrightarrow \hat{p}$ weakly star in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ とすれば，勿論 $p_{n_k} \longrightarrow \hat{p}$ in $\mathcal{D}'$ でもある。ところで，$p_n \longrightarrow p$ in $\mathcal{D}'$ はすでに分っているから，$\hat{p}=p$ でなくてはならない。またこの極限は，部分列のとり方によらず一意であるから，結局 $p_n \longrightarrow p$ w* in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ という事になる。

以上をふまえて，p_n に対する等式(3) において $n \to \infty$ とすれば $p \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ が等式(3) を満足する事になり，p は問題 (2) の広義解である事が示される。

次に，同じデータに対し広義解が2つ以上あるとし，それ等の中から勝手に p, q をえらぶ。すると等式(3) から

$$\int_0^T (p-q, \Box v)\,dt = 0 \qquad \text{for } \forall v \in \mathcal{D}^*$$

となる。これより任意の $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ に対し

$$\int_0^T (p-q, \varphi)\,dt = 0$$

が従がい，$p=q$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ となり，広義解の一意性が示された。

定理1の証明終り。

さて，現実の問題(1)に戻ろう。そこでは，データに関し仮定Ⅰよりも強い条件(以下の仮定Ⅱ)が成立している。

仮定Ⅱ (i) $f = 0$, (ii) $u_0, u_1 = 0$
(iii) $\phi_0 \in L^2((0,\infty) \times \mathbb{R})$ であり，次のような関数 $R(t) \in C^2(0,\infty)$ が存在する： $R(0) = 0$, $R(\infty) = \infty$, $dR/dt > 0$ $d^2R/dt^2 < 0$, $\frac{dR}{dt} \longrightarrow \begin{cases} \infty & t \to 0 \\ k & t \to \infty \end{cases}$,($k \in (0,1)$ は定数) で $\phi_0(t,x)$ の台は集合 $\{(t,x) \mid |x| \leqq R(t)\}$ に含まれる。t_0 を $dR(t_0)/dt = 1$ なる点とする。

この時，ϕ の伝播について次の定理が成立する。

定理2 仮定Ⅱが成りたっているとする。ϕ を問題(2)の広義解とする。すると，超関数として $]0,T[\times \Omega \setminus C$ 上で $\phi = 0$ である。ただし $C = \{(t,x,y) \in]0,T[\times \Omega \mid \sqrt{x^2+y^2} < t + R(t_0) - t_0\}$。

証明の概略 $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times \Omega)$，$\varphi$ の台 $\subset C$ なる φ に対し，$\int_0^T (\phi, \varphi)\,dt = 0$ を示せばよい。これには次の補題が要る。

補題2. $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$, φの台$\subset C$ とする。
この時，問題(5)の解v_φは，$v_\varphi = 0$ $(]0,T[\times\Omega\setminus C$で$)$
となる。

補題2の証明は，(5)にv'をかけ，Gaussの発散定理を用いて評価する事によってなされる。
さて，十分小さい$\varepsilon>0$に対し，p_nの台$\subset\{(t,x)\mid |x|\leqq R(t)+\varepsilon\}$とする。補題2により，台が$C$に含まれる$\varphi\in\mathcal{D}$に対し，$v_\varphi$を考える事より，等式(3)から$\int_0^T(p_n,\varphi)dt=0$が導かれる。ここで$n\longrightarrow\infty$とすればよい。

定理2の証明終り。

最後に補題1の証明の指針を述べよう。時間を逆転すればよいから(5)の代りに

$$
(6)\quad\begin{cases}
\Box v = \varphi(t,x,y)\in L^2(0,T;H_0^1) & 0<t<T,\ (x,y)\in\Omega\\
v(0)=v'(0)=0 & (x,y)\in\Omega\\
v|_{\partial\Omega}=0
\end{cases}
$$

を考える。列$\varphi_n\in\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$を$\varphi_n\longrightarrow\varphi$ in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$にとる。非斉次項φ_nに対する(6)の解をv_nとする。発展方程式の解の正則性の理論を用いれば，例へば

$$
\begin{cases}
v_n\in C^2([0,T];H^2\cap H_0^1)\\
v_n'\in C^1([0,T];H_0^1)
\end{cases}
$$

$\Delta v_n' \in C([0,T]; H_0^1)$

等を示し得る。この近似解に対し以下のような a priori estimates を証明出来る。

(i) v_n に対する方程式(6)に v_n' をかけて積分する事により，

$$\|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|\nabla v_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqq C(T)\ \|\varphi_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}。$$

ただし $C(T)$ は T にのみ依存する定数.

(ii) 同じく(6)に $-\Delta v_n'$ をかけて積分する事により，

$$\|\nabla v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)},\ \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)} \leqq C(T)\ \|\varphi_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

これらの評価式を用いて，さらに $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ を使えば v_n が(6)の解 v に収束し，$v \in \mathcal{D}^*$ である事が得られる。

参考文献

1) 桜井　明： 多媒質中の衝撃波，日本物理学会誌 29巻 10号 (1974)

2) 溝畑　茂： 偏微分方程式論， 岩波書店 (1965)